अनुक्रमांक

मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 8

नाम ..

131

324 (BB)

2023

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट] *[पूर्णांक : 100*

निर्देश :

(i) *प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।*

(ii) *इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं ।*

(iii) ***सभी*** *प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(iv) *प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः उल्लेख किया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं ।*

(v) *प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं ।*

(vi) *प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अंत तक करते आइए ।*

(vii) *जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए ।*

1. ***सभी*** खण्ड कीजिए । प्रत्येक खण्ड का सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर-पुस्तिका में लिखिए :

(क) यदि $f : X \to Y$ एक आच्छादक फलन है, यदि और केवल यदि f का परिसर होगा : 1

(i) X (ii) $X \cap Y$ (iii) Y (iv) $X \cup Y$

(ख) $\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \sec^{-1}(-2)$ का मान होगा : 1

(i) π (ii) $-\frac{\pi}{3}$ (iii) $\frac{\pi}{3}$ (iv) $\frac{2\pi}{3}$

(ग) यदि $\begin{bmatrix} 2x-y & x+2y \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, तो x और y का मान होगा : 1

(i) $x = 1,\ y = 1$ (ii) $x = 2,\ y = 1$

(iii) $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2}$ (iv) $x = 1,\ y = \frac{1}{2}$

(घ) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ का मान होगा : 1

(i) $\frac{1}{2a^2} \log \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

(ii) $\frac{1}{2a} \log \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

(iii) $\frac{1}{4a} \log \left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

(iv) $\frac{1}{4a^2} \log \left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

(ङ) अवकल समीकरण $(x-y)\frac{dy}{dx} = x + 2y$ की प्रकृति होगी : 1

(i) बहुघातीय

(ii) घात एक और रेखीय

(iii) समघातीय और घात शून्य

(iv) समघातीय और घात एक

2. ***सभी*** खण्ड कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि एक एकैकी फलन $f : \{2, 3, 4\} \to \{2, 3, 4\}$ आच्छादक है । 1

(ख) यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ तथा $A + A' = I$, तो α का मान ज्ञात कीजिए । 1

(ग) यदि $\Delta = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, तो $|\Delta|$ का मान ज्ञात कीजिए । 1

(घ) व्यंजक $\hat{i} \cdot \hat{i} + \hat{j} \cdot \hat{j} + 2\hat{k} \cdot \hat{k}$ का मान ज्ञात कीजिए । 1

(ङ) अवकल समीकरण

$$xy\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} - y = 2$$

की घात ज्ञात कीजिए । 1

3. ***सभी*** खण्ड कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि $f(x) = \tan x \ \forall x \in \mathbb{R}$ एक संतत फलन है । 2

(ख) यदि $y = A\sin x + B\cos x$ है, तो इसका अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए । 2

(ग) वक्र $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर अभिलम्ब x-अक्ष के समान्तर हो । 2

(घ) यदि किसी आयत की लम्बाई 3 cm/min की दर से घट रही है और चौड़ाई 2 cm/min की दर से बढ़ रही है, तो $x = 10$ cm तथा $y = 6$ cm पर आयत के परिमाप में परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए, जहाँ x = लम्बाई तथा y = चौड़ाई । 2

4. *सभी* खण्ड कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि $f(x) = |x - 2|$, $x = 2$ पर अवकलनीय नहीं है । 2

(ख) मान ज्ञात कीजिए : 2

$$\int \tan^4 x \sec^2 x \, dx$$

(ग) यदि बिन्दुओं A, B, C और D के स्थिति सदिश क्रमश: $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $2\hat{i} + 5\hat{j}$, $3\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ और $\hat{i} - 6\hat{j} - \hat{k}$ हैं, तो सिद्ध कीजिए कि बिन्दु संरेख हैं । 2

(घ) आलेखीय विधि द्वारा निम्न व्यवरोधों के अन्तर्गत रैखिक प्रोग्रामन समस्या का हल कीजिए :

$$x + 2y \geq 10,$$
$$3x + 4y \leq 24,$$
$$x \geq 0, y \geq 0,$$

तो $z = 200x + 500y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए । 2

5. *सभी* खण्ड कीजिए :

(क) रेखाओं $\vec{r} = (1 - t)\hat{i} + (t - 2)\hat{j} + (3 - 2t)\hat{k}$ तथा $\vec{r} = (s + 1)\hat{i} + (2s - 1)\hat{j} - (2s + 1)\hat{k}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए । 5

(ख) एक पाठशाला में 500 विद्यार्थी हैं, जिनमें से 230 लड़कियाँ हैं । यह ज्ञात है कि 230 में से 10% लड़कियाँ कक्षा XII में पढ़ती हैं । एक यादृच्छया चुना गया विद्यार्थी कक्षा XII में पढ़ता है तथा वह लड़की है, उसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए । 5

(ग) बिन्दु (1, 1) से गुज़रने वाले एक ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका अवकल समीकरण $x\,dy = (2x^2 + 1)\,dx$ $(x \neq 0)$ है । 5

(घ) सिद्ध कीजिए कि दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के लिए सदैव $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}|\,|\vec{b}|$. 5

(ङ) मान ज्ञात कीजिए : 5

$$\int \left(\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}\right) dx$$

6. *सभी* खण्ड कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि किसी कॉलेज के पुस्तकालय की समस्त पुस्तकों के समुच्चय A में $R = \{(x, y) : x$ तथा y में पेजों की संख्या समान है$\}$ द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध R एक तुल्यता सम्बन्ध है । 5

(ख) $y = x^{x^x}$ का अवकलन कीजिए । 5

(ग) मान लीजिए कि $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ है ।

तो एक ऐसा आव्यूह D ज्ञात कीजिए कि $CD - AB = 0$ हो । 5

(घ) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A \,.\, adj\, A = |A|\, I$. 5

(ङ) किसी धनात्मक अचर a के लिए $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $y = a^{t + \frac{1}{t}}$ तथा $x = (t + \frac{1}{t})^a$. 5

7. कोई *एक* खण्ड कीजिए :

(क) आव्यूह विधि से रैखिक समीकरण-निकाय को हल कीजिए : 8

$$3x + 2y + 3z = 5$$
$$-2x + y + z = -4$$
$$-x + 3y - 2z = 3$$

(ख) समतलों $\vec{r} \,.\, (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$ और $\vec{r} \,.\, (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) = -5$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु; तथा बिन्दु (1, 1, 1) से गुज़रने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए । 8

8. कोई *एक* खण्ड कीजिए :

(क) शत्रु का एक अपाचे हेलीकॉप्टर वक्र $y = x^2 + 7$ के अनुदिश प्रदत्त पथ पर उड़ रहा है । बिन्दु (3, 7) पर स्थित एक सैनिक अपनी स्थिति से निकटतम दूरी पर से उस हेलीकॉप्टर को गोली मारना चाहता है । निकटतम दूरी ज्ञात कीजिए । 8

(ख) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 4x \operatorname{cosec} x \; (x \neq 0)$ का एक विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए । दिया गया है कि $y = 0$, जब $x = \frac{\pi}{2}$. 8

9. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) तीन डिब्बों में रंगीन गेंदें निम्न सारणी में दर्शाए अनुसार आबंटित की गई हैं :

डिब्बा	रंग		
	काला	सफेद	लाल
I	3	4	5
II	2	2	2
III	1	2	3

एक डिब्बे को यादृच्छया चुना गया और उसमें से एक गेंद निकाली गई । यदि गेंद का रंग काला है, तो इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि गेंद को डिब्बा-III से निकाला गया है । *8*

(ख) निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत $z = x + y$ का अधिकतमीकरण कीजिए : *8*

$x - y \le -1, \; -x + y \le 0$ और $x \ge 0, \; y \ge 0$

(English Version)

Instructions :

(i) First 15 minutes time has been allotted for the candidates to read the question paper.

*(ii) There are in all **nine** questions in this question paper.*

*(iii) **All** questions are compulsory.*

(iv) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted has been clearly mentioned.

(v) Marks allotted to the questions are indicated against them.

(vi) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.

(vii) Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. Do ***all*** parts. Select the correct alternative of each part and write it in your answer book :

(a) If $f : X \to Y$ is an onto function, if and only if the range of f will be : *1*

(i) X (ii) $X \cap Y$ (iii) Y (iv) $X \cup Y$

(b) The value of $\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \sec^{-1}(-2)$ will be : *1*

(i) π (ii) $-\frac{\pi}{3}$ (iii) $\frac{\pi}{3}$ (iv) $\frac{2\pi}{3}$

(c) If $\begin{bmatrix} 2x - y & x + 2y \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, then the value of x and y will be : *1*

(i) $x = 1, \; y = 1$ (ii) $x = 2, \; y = 1$

(iii) $x = \frac{1}{2}, \; y = \frac{1}{2}$ (iv) $x = 1, \; y = \frac{1}{2}$

(d) The value of $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ will be : *1*

(i) $\frac{1}{2a^2} \log \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$ (ii) $\frac{1}{2a} \log \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

(iii) $\frac{1}{4a} \log \left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$ (iv) $\frac{1}{4a^2} \log \left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

(e) The nature of the differential equation $(x - y)\frac{dy}{dx} = x + 2y$ will be : *1*

(i) Multipower (ii) Power one and linear

(iii) Homogeneous and power zero (iv) Homogeneous and power one

2. Do ***all the*** parts :

(a) Prove that a one-one function $f : \{2, 3, 4\} \to \{2, 3, 4\}$ is onto. *1*

(b) If $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ and $A + A' = I$, then find the value of α. *1*

(c) If $\Delta = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, then find the value of $|\Delta|$. *1*

(d) Find the value of the expression $i \cdot i + j \cdot j + 2k \cdot k$. *1*

(e) Find the degree of the differential equation

$$xy\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} - y = 2.$$ *1*

3. Do ***all*** the parts :

(a) Prove that $f(x) = \tan x \ \forall x \in \mathbb{R}$ is a continuous function. *2*

(b) If $y = A \sin x + B \cos x$, then find the differential equation of it. *2*

(c) Find those points on the curve $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$, on which the normal is parallel to the x-axis. *2*

(d) If the length of a rectangle is decreasing at the rate of 3 cm/min and width is increasing at the rate of 2 cm/min, then find the rate of change in perimeter of the rectangle when $x = 10$ cm and $y = 6$ cm, where x = length and y = width. *2*

4. Do ***all*** the parts :

(a) Prove that $f(x) = |x - 2|$ is not differentiable at $x = 2$. 2

(b) Evaluate : 2

$$\int \tan^4 x \sec^2 x \, dx$$

(c) If the position vectors of the points A, B, C and D are $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $2\hat{i} + 5\hat{j}$, $3\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ and $\hat{i} - 6\hat{j} - \hat{k}$, respectively. Prove that the points are collinear. 2

(d) By graphical method solve the LPP under the following constraints :

$$x + 2y \geq 10,$$

$$3x + 4y \leq 24,$$

$$x \geq 0, y \geq 0,$$

then find the minimum value of $z = 200x + 500y$. 2

5. Do ***all*** the parts :

(a) Find the shortest distance between the lines $\vec{r} = (1 - t)\hat{i} + (t - 2)\hat{j} + (3 - 2t)\hat{k}$ and $\vec{r} = (s + 1)\hat{i} + (2s - 1)\hat{j} - (2s + 1)\hat{k}$. 5

(b) There are 500 students in a school, of which 230 are girls. Also, 10% of 230 girls are studying in class XII. Find the probability that a randomly chosen student is of XII class and is a girl. 5

(c) Find the equation of the curve which is passing through the point (1, 1) and whose differential equation is $x\,dy = (2x^2 + 1)\,dx$ $(x \neq 0)$. 5

(d) For any two vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$, prove that always $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}|\,|\vec{b}|$. 5

(e) Evaluate :

$$\int \left(\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}\right) dx$$ 5

6. Do ***all*** the parts :

(a) A relation $R = \{(x, y)$: Number of pages in x and y are equal$\}$ is defined on the set A of all books in a college library. Prove that R is an equivalence relation. 5

(b) Differentiate : $y = x^{x^x}$. 5

(c) Let $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$.

Then find a matrix D such that $CD - AB = 0$. 5

(d) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, then prove that $A \cdot \operatorname{adj} A = |A|\, I$. 5

(e) For any positive constant a, evaluate $\frac{dy}{dx}$, where $y = a^{t+\frac{1}{t}}$ and $x = \left(t + \frac{1}{t}\right)^{a}$. 5

7. Do any *one* part :

(a) Solve the system of linear equations by matrix method : 8

$$3x + 2y + 3z = 5$$
$$-2x + y + z = -4$$
$$-x + 3y - 2z = 3$$

(b) Find the equation of the plane which passes through the intersecting point of the planes $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$ and $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) = -5$; and the point (1, 1, 1). 8

8. Do any *one* part :

(a) An Apache helicopter of the enemy is flying along the curve $y = x^2 + 7$. A soldier placed at the point (3, 7), wants to shoot down the helicopter when it is nearest to him. Find the nearest distance. 8

(b) Find the particular solution of the differential equation

$\frac{dy}{dx} + y \cot x = 4x \operatorname{cosec} x \; (x \neq 0)$. Given that $y = 0$, when $x = \frac{\pi}{2}$. 8

9. Do any *one* part :

(a) Coloured balls are distributed in three containers according to the following table :

Container	Colour		
	Black	White	Red
I	3	4	5
II	2	2	2
III	1	2	3

A ball is drawn out from a container randomly chosen. If the ball is black, then find the probability that the ball is drawn from Container-III. 8

(b) Find the maximization of $z = x + y$, under the following constraints :

$x - y \leq -1, \; -x + y \leq 0$ and $x \geq 0, y \geq 0$. 8